Towards geometric Satake correspondences for Kac-Moody algebras

中島　啓 (Kavli IPMU)

- $Q = (Q_0, Q_1)$: edge loop を持たない箙
- $\mathfrak{g}_Q$: 箙 Q の隣接行列から定まる Cartan 行列が定める(対称な)Kac-Moody Lie 環

このとき、Q の表現論と$\mathfrak{g}_Q$の表現論が関係していることが、たくさんの研究で指摘されている。例えば、講演者によって次のことが示されている

定理 [N 94, 98]

Qから定められる箙多様体の中間次数ホモロジー群は、$\mathfrak{g}_Q$の可積分最高ウェイト加群の構造を持つ。

この講演では、[N 15, Braverman-Finkelberg-N 16] で数学的に定義されたゲージ理論のクーロン枝を、Q から定められる箙ゲージ理論について適用すると、同様に $\mathfrak{g}_Q$ の表現論との関係が期待できるという予想、とそれが有限型とアファイン A 型の場合に検証できるということを説明する。

記号の準備 (箙多様体の定義 [N 94, 98] にもあらわれる)

- $V=\bigoplus_{i\in Q_0} V_i, W=\bigoplus_{i\in Q_0} W_i$ をQ_0で次数づけられた、有限次元複素ベクトル空間
- このとき、$\mathbf{N}\equiv\mathbf{N}(V,W):=\bigoplus_{h\in Q_1}\mathrm{Hom}(V_{o(h)},V_{i(h)})\oplus\bigoplus_{i\in Q_0}\mathrm{Hom}(W_i,V_i)$ と定める
- $G\equiv G(V):=\prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(V_i)$ が、自然な共役作用により$\mathbf{N}$を表現として持つ
- 指標 $\chi\colon G\to\mathbb{C}^\times$ を determinant の積として定める

- V,Wに対応して、$\mathfrak{g}_Q$の二つのウェイト λ,μを

$$\lambda=\sum_i \dim W_i\cdot\Lambda_i,\qquad \mu=\lambda-\sum_i\dim V_i\cdot\alpha_i$$

ときめる

ゲージ理論のクーロン枝の数学的な定義 [N 15, BFN 16]

- もともとは、理論物理学で 90 年代後半から 3 次元の$\mathcal{N}=4$超対称性ゲージ理論のクーロン枝が研究されていたが、数学的に厳密な定義は最近になって与えられた
- $\mathcal{M}_C \equiv \mathcal{M}_C(V,W)$は、まず可換環 $H_*^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$ を定義し、次にアファイン代数多様体として、$\operatorname{Spec} H_*^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$として定義される
- ここで、$\mathcal{R}$は、無限次元の多様体で、次の三つ組のモジュライ空間である

1. 各 $i \in Q_0$ごとに、形式的円盤D上のベクトル束 $\mathcal{E}_i$を与える
2. 原点を除いた $D \setminus \{0\}$ 上の枠 $\varphi_i \colon \mathcal{E}_i|_{D\setminus\{0\}} \to \mathcal{O}_{D\setminus\{0\}} \otimes_\mathbb{C} V_i$を与える
3. 各辺 $h \in Q_1$と各頂点 $i \in Q_0$ ごとに、準同型 $B_h \colon \mathcal{E}_{o(h)} \to \mathcal{E}_{i(h)}$ と、$a_i \colon W_i \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_D \to \mathcal{E}_i$が与えられ、$\varphi_i$により自明束の間の準同型としたときに、原点 0 を超えてDに拡張されると条件を課す

- このとき$G_\mathcal{O} \equiv G[[z]]$は自明化の取り換えで作用する
- 同変 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$ は、合成積により可換環になる

注意. 箙ゲージ理論のクーロン枝とアファイン・グラスマン多様体の横断

- QがADE型のときは、対応する Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}_Q$ は、複素単純 Lie 環になるが、クーロン枝は、$\mathfrak{g}_Q$を Lie 環にもつ Lie 群 G_Q (adjoint 型) のアファイン・グラスマン多様体の一般化された横断切になる
- もう少し詳しく説明しよう。Gr_{G_Q}をアファイン・グラスマン多様体とする。$G_Q[[z]]$の作用の軌道は G_Qの支配的コウェイト λ でパラメトライズされる。軌道 $\mathrm{Gr}^\lambda_{G_Q}$の閉包 $\overline{\mathrm{Gr}^\lambda_{G_Q}}$の中に、$\mu \le \lambda$となるコウェイトに対応する軌道 $\mathrm{Gr}^\mu_{G_Q}$が含まれ、横断切と閉包の交差 $\overline{\mathrm{Gr}^\lambda_{G_Q}} \cap (\mathrm{Gr}^\mu_{G_Q})^\perp$を考えることができる
- QがADE型のときのクーロン枝は、λ, μがともに支配的なとき、$\overline{\mathrm{Gr}^\lambda_{G_Q}} \cap (\mathrm{Gr}^\mu_{G_Q})^\perp$になり、$\mu$が支配的でないときは、その一般化になる

[BFN 16] による、Kac-Moody Lie 環の幾何学的佐武対応予想

- $(\deg\mathcal{E}_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0} \cong \pi_1(G)$により、$H_*^{G_\mathcal{O}}(\mathcal{R})$は、$\mathbb{Z}^{Q_0}$に値をもつ次数付けをもつ。対応してクーロン枝 $\mathcal{M}_C$ は、トーラス T^{Q_0}の作用をもつ。箙多様体の定義にあらわれる指標 $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$は、$\mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$を誘導し、1 パラメータ部分群 $\mathbb{C}^\times \to T^{Q_0}$を与える。したがって、$\mathcal{M}_C$への$\mathbb{C}^\times$の作用を定める
- そこで、attracting set を $\mathfrak{A}^\chi \equiv \mathfrak{A}^\chi(V,W) := \{x \in \mathcal{M}_C \mid \exists \lim_{t\to 0} t\cdot x\}$と定義する

<u>**予想**</u> [BFN 16]

1. $\mathfrak{A}^\chi$は空集合であるか、それとも$\mathcal{M}_C$のラグランジアン部分多様体である。より正確には、$\mathcal{M}_C$のシンプレクティック・リーフとの共通集合はラグランジアン部分多様体である
2. $\displaystyle\bigoplus_V H_{\mathrm{top}}(\mathfrak{A}^\chi(V,W))$ は、最高ウェイトが λの、$\mathfrak{g}_Q$の可積分最高ウェイト表現の構造をもつ。直和因子は、ウェイト μのウェイト空間である

- QがADE型のときは、幾何学的佐武対応 (Lusztig, Ginzburg, Beilinson-Drinfeld, Mirkovic-Vilonen による) により、この予想が正しいことが従う。ただし、正確にはμが支配的でない場合の考察が必要で、これは [Krylov 18] でなされた。

新しい結果

- [N 18] では、$\mathfrak{g}_Q$の表現の構造を具体的にどのように入れるかを定式化した予想と、そのアファイン A 型の場合の検証がなされた
- 新しい点は、各 $i \in Q_0$ に対して、$\chi_i(g) := \prod_{j \neq i} \det g_j$ という指標を定め、対応する固定点集合 $\mathcal{M}_C^{\chi_i}$と attracting set $\mathfrak{A}^{\chi_i}$を考えることである。極限を与えることにより、射 $p\colon \mathfrak{A}^{\chi_i} \to \mathcal{M}_C^{\chi_i}$が定まる。元の attracting set $\mathfrak{A}^{\chi}$は、$\{x \in \mathfrak{A}^{\chi_i} \mid p(x) \in \mathcal{M}_C^{\chi_i} \cap \mathfrak{A}^{\chi}\}$ となり、$\mathcal{M}_C^{\chi_i}$ 内の attracting set の解析により$\mathfrak{A}^{\chi}$の構造が見えてくる
- さらに $\mathcal{M}_C^{\chi_i}$ は、A_1型の箙ゲージ理論に対するクーロン枝と同型であり、その中での attracting set は、ベクトル空間になっていることが分かる
- もとの [BFN16] でもそうであったが、$H_{\mathrm{top}}(\mathfrak{A}^{\chi})$は、正確には$\chi$に関する双曲制限関手 Φ_χ を交叉ホモロジー複体 $\mathrm{IC}(\mathcal{M}_C)$に適用した $\Phi_\chi(\mathrm{IC}(\mathcal{M}_C))$として定義される。固定点集合$\mathcal{M}_C^{\chi}$は空集合か、そうでなければ一点であると予想されて、さらに先の予想の 1 からΦ_χは、hyperbolic semismall と予想されるので $\Phi_\chi(\mathrm{IC}(\mathcal{M}_C))$はベクトル空間であり、$H_{\mathrm{top}}(\mathfrak{A}^{\chi})$に同型である。ここでは簡単のために、双曲制限関手は持ち出さなかった